

A 2005-2008-as periódusban, azaz az OTKA 4 éve alatt a kutatócsoportunk a szerződésben vállalt témák kutatásával foglalkozott. Így, tanulmányoztuk a polinomiális-exponenciális diofantikus egyenleteket, a lineáris rekurziókat, a balansz számokat, az unimodális sorozatokat és a lineáris rekurziókhoz kapcsolódó polinomsorozatok polinomjai gyökeit és azok lokalizációját.

A kutatócsoport létszáma végig 5 fő volt (témavezető: Mátyás Ferenc PhD; tagok: Liptai Kálmán PhD, Szalay László PhD, Olajos Péter PhD és Orosz Gyuláné PhD, aki elhúzódó betegsége miatt sajnos nem tudott intenzíven részt venni a kutatásokban). Az OTKA támogatásával írtunk 21 cikket, ebből már megjelent 16 és további 5 van megjelenés alatt, olyan rangos nemzetközi számelméleti konferenciákon tarthattunk előadásokat kutatási eredményeinkből, mint pl. a 17th (18th) Czech and Slovak International Conference on Number Theory (2005, 2007), Colloquium of UNAM (Morelia, 2005), 25th Journé Arithmétique (Edinburgh, 2007), 13th International Conference on Fibonacci Numbers and their Applications (Patras, 2008), Integers Conference (Carrolton, 2007). A megtartott (hazai és külföldi) konferencia-előadásaink száma 27, melynek kétharmada angol nyelvű volt. Az OTKA csoportunk nemzetközi számelméleti konferenciát szervezett Egerben (2007) és Sopronban (2008). Részt vettünk továbbá az Explicit Methods in Number Theory (Bordeaux, 2007) és a Winter School on Explicit Methods in Number Theory (Debrecen, 2009. január) workshop-okon.

Külön kiemelő, hogy az OTKA csoportunk kiváló szakmai kapcsolatot épített ki és tart fenn több hazai (elsősorban debreceni) és külföldi számelméleti kutatóval, pl. Mexikóból Florian Luca professzorral. Szalay László teljesítménye külön említésre méltó, mivel a cikkek és konferencia-előadások mellett elnyert egy 3 hónapos ösztöndíjat Mexikóba, Eötvös Ösztöndíjas volt (2005), majd pedig Bolyai János Kutatói Ösztöndíjas (2006-2008), 2007-ben sikeresen lezárta habilitációs eljárását a Debreceni Egyetemen. Liptai Kálmán pedig most (2009) tervezi benyújtani habilitációs értekezését szintén a DE-re.

Az elért eredmények részletezése: A balansz számokkal - az n természetes számot balansz számnak nevezzük, ha $1+2+\dots+(n-1)=(n+1)+(n+2)+\dots+(n+k)$ valamely k természetes szám esetén - kapcsolatos kutatások témakörében - G. Walsh eredményeit felhasználva - ismert eredményre sikerült elemi bizonyítást adni. Továbbá Baker és Davenport szimultán Pell-egyenletekre vonatkozó klasszikus módszerét alkalmazva kaptuk, hogy nem létezik olyan balansz szám, amely egyben Lucas szám is lenne. Általánosítottuk az American Mathematical Monthly folyóiratban közölt „House problem” című feladatot és az általánosított (k,l) balansz számokkal (ahol a fenti egyenlet bal oldalán k -edik, még jobb oldalán l -edik hatványok szerepelnek) kapcsolatos eredményeket igazoltunk: csak véges sok (k,k) általánosított balansz szám létezik, illetve, hogy nem létezik (k,l) balansz szám, ha $k < l$. Néhány konkrét numerikus eredmény is közlésre került. A bizonyításokban a Bernoulli polinomokkal és az $S_k(x)$ polinomokkal kapcsolatos eredmények kerültek felhasználásra.

Azt is bizonyítottuk, hogy speciális feltételek mellett, csak egy olyan (a,b) típusú balansz szám van, mely teljes hatvány. A bizonyítás során felhasználtuk Bennett és Skinner egy mély eredményét, továbbá az elliptikus és hiperelliptikus görbékre vonatkozó egész pont keresési algoritmusokat (a MAGMA program használatával).

D. Garth, D. Mills és P. Mitchel Fibonacci-együtthatós polinomok gyökeire vonatkozó eredményét általánosítottuk másodrendű lineáris rekurzív sorozatok egy széles családjára, megadva a valós gyökök számát és becslést adtunk a gyökök abszolút értékeire. Lineáris

rekurzióval definiált polinomok gyökei abszolút értékeire nyert eredményeinket összegeztük az ICI-7 konferencia kötetében megjelenő cikkünkben.

Bebizonyítottuk, hogy nem létezik három különböző pozitív a, b, c egész szám, melyre $ab+1$, $ac+1$ és $bc+1$ mindegyike Fibonacci szám lenne, sőt beláttuk, hogy rögzített rekurzív sorozatban is általában csak véges sok ilyen hármas van. Továbbá leírtuk azokat a kivételes eseteket is, melyeknél végtelen sok fenti tulajdonságú hármas adható meg.

Megmutattuk továbbá, hogy az eredeti és bizonyos általánosított Pascal háromszögekben bármely egyenes mentén elhelyezkedő binomiális és általánosított binomiális együtthatók unimodális sorozatot képeznek.

Mellékeredményként, a dinamikus LaTeX alapú pdf fóliák megvalósítási lehetőségeit vizsgálva a diofantikus egyenletek megoldási lehetőségeinek, függvények ábrázolásának, tulajdonságainak szemléltetését is segítettük. A kriptográfiai protokollt is érintették kutatásaink. Az Egerfood Regionális Tudásközpontban létrehozott informatikai hálózat titkosítási lehetőségeit tekintettük át. Megvizsgáltuk, hogy melyik kriptográfiai módszer a leghatékonyabb. Az AES-128 bizonyult a legjobbnak.

Összefoglalva elmondható, hogy az OTKA támogatást a terveknek megfelelően használtuk, az elért eredményeink a jövőre nézve is biztatóak.